Gymnasium Hilpoltstein – Grundwissen 8. Jahrgangsstufe

Wissen / Können	Aufgaben und Beispiele

1. Proportionalität

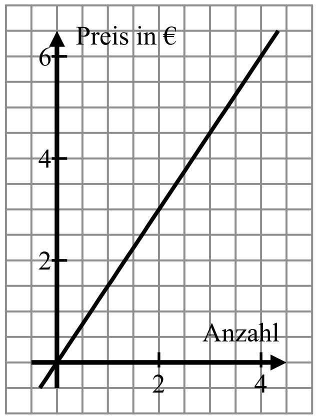
Proportionale Zuordnungen

x und y sind **proportional** zueinander, wenn
- zum *n*-fachen Wert von x der *n*-fache Wert von y gehört
- die Wertepaare quotientengleich sind, d.h. es gilt $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$; $q = \frac{y}{x}$
- $x \mapsto q \cdot x$, wobei q der Proportionalitätsfaktor ist
- das Diagramm eine Ursprungsgerade ist

2 Gurken kosten 3 €,
5 Gurken kosten 7,50 €.

$\frac{3}{2} = \frac{7{,}50}{5}$; $q = 1{,}5$

$x \mapsto 1{,}5 \cdot x$



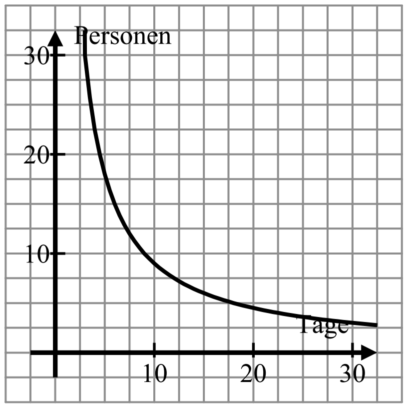
Indirekt proportionale Zuordnungen

x und y sind **umgekehrt proportional**, wenn
- zum *n*-fachen Wert von x der $\frac{1}{n}$-fache Wert von y gehört
- die Wertepaare produktgleich sind, d.h. es gilt: $x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2$; $p = x \cdot y$
- $x \mapsto \frac{p}{x}$
- das Diagramm eine Hyperbel ist

Vorrat für 2 Personen: 45 Tage
Vorrat für 6 Personen: 15 Tage
Vorrat für 10 Personen: 9 Tage

$2 \cdot 45 = 10 \cdot 9 =$
$= 6 \cdot 15 = 90 = p$

$x \mapsto \frac{90}{x}$



2. Funktionen

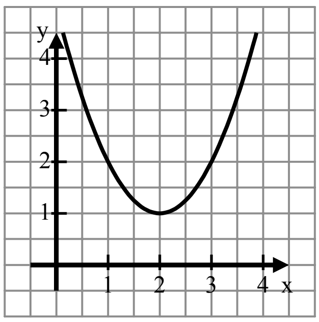
Eine **Funktion** f ist eine **eindeutige Zuordnung**: Sie ordnet jedem zulässigen x-Wert **genau einen** y-Wert zu.

Schreibweisen: $f: x \mapsto y$ oder $f(x) = y$.
Der von x abhängige Wert f(x) bzw. y heißt **Funktionswert**.

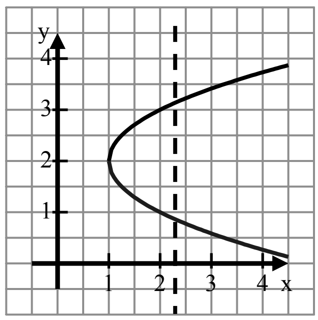
Wegen der Eindeutigkeit liegen beim Graphen G_f der Funktion Punkte nie übereinander.

Die **Definitionsmenge** ist die Menge aller zulässigen Werte von x.

Die **Wertemenge** ist die Menge aller Funktionswerte.



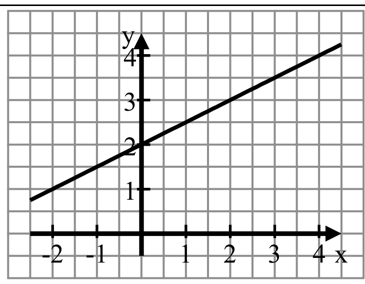
Funktion



keine Funktion

Eine Funktion kann beschrieben werden durch:

- einen Graphen / ein Schaubild
- einen Funktionsterm
- eine Wertetabelle



$f(x) = 0{,}5x + 2$

x	-2	0	1	2
y = f(x)	1	2	2,5	3

Ermittlung der **Schnittpunkte** des Funktionsgraphen von f

- mit der x-Achse (**Nullstelle**): N

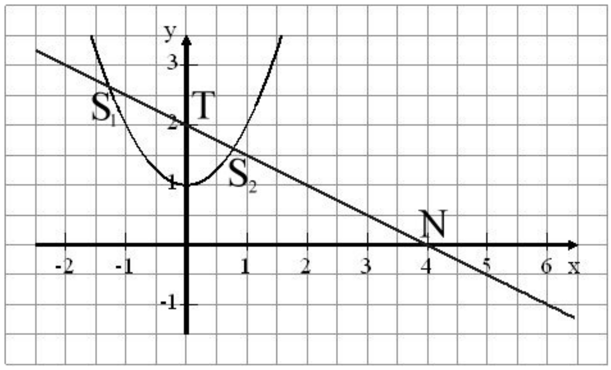
  $y = 0$

- mit der y-Achse: T

  $x = 0$

- mit dem Graphen einer weiteren Funktion g: S_1 und S_2

  $f(x) = g(x)$



3. Lineare Funktionen

Die Gleichung der linearen Funktion hat die allgemeine Form

$$y = m \cdot x + t$$

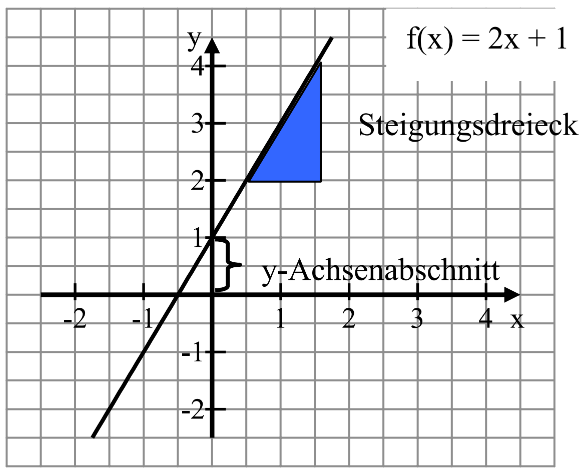
m: **Steigung**; t: **y-Achsenabschnitt**

Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade.

Die Steigung kann über ein **Steigungsdreieck** ermittelt werden:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

m > 0: steigende Gerade
m < 0: fallende Gerade
m = 0: Parallele zur x-Achse



$$m = \frac{3-1}{1-0} = 2; \ t = 1$$

4. Der Kreis (Umfang und Fläche)

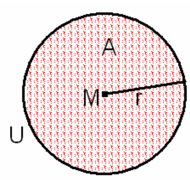
Ein Kreis mit dem Radius r hat
den Umfang $U = 2\pi \cdot r$
und den Flächeninhalt $A = \pi \cdot r^2$.

Dabei ist $\pi = 3{,}141...$ die **Kreiszahl**.

Eine 2€-Münze hat den Radius $r = 1{,}3$ cm.

$U = 2\pi \cdot r = 2\pi \cdot 1.3 \text{ cm} \approx 8{,}17 \text{ cm}$

$A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (1{,}3 \text{ cm})^2 \approx 5{,}31 \text{ cm}^2$

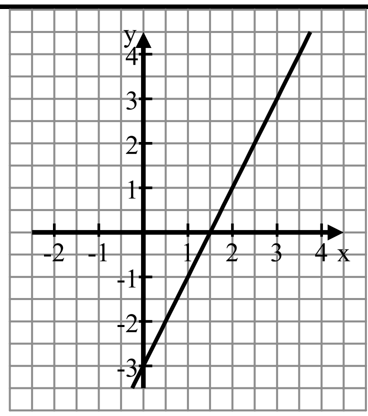


5. Gleichungen und Gleichungssysteme

Lineare Gleichungen mit zwei Variablen
Gleichungen der Form 2x – y = 3 heißen **lineare Gleichung mit zwei Variablen**.

Darstellung der Gleichung:
- Implizite Form: ax + by + c = 0
  (a und b nicht gleichzeitig 0)
- Explizite Form: y = mx + t

Es gilt:
(1) Jede Lösung besteht aus Zahlenpaaren (x|y).
(2) Die Lösungsmenge enthält unendlich viele Lösungen.
(3) Die graphische Darstellung der Lösungsmenge ist eine Gerade.



$$L = \{(x|y) \mid y = 2x - 3\}$$

Menge aller Punkte $(x|y)$, für die gilt: $y = 2x - 3$

Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen
Ein lineares **Gleichungssystem (LGS)** von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten x und y lässt sich stets auf die Form
I. $ax + by = e$
II. $cx + dy = f$ bringen.

Lösungsmethoden:
(1) Einsetzungsverfahren

(2) Additionsverfahren

(3) Zeichnerische Lösung
Zeichnet man die zu den beiden Gleichungen gehörenden Geraden, so veranschaulichen die gemeinsamen Punkte die Lösung des LGS.

Anzahl der Lösungen/geometrische Interpretation:
Eine lineares Gleichungssystem kann
- **genau eine Lösung** (zwei Geraden schneiden sich in einem Punkt)
- **keine Lösung** (zwei Geraden sind parallel)
- **unendlich viele Lösungen** (zwei Geraden sind identisch)

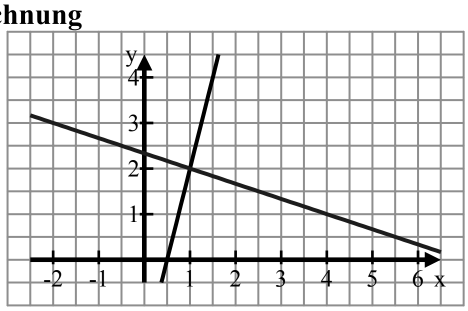
besitzen.

I. $x + 3y = 7$
II. $4x - y = 2$

(1) Einsetzungsverfahren
II\`. $y = 4x - 2$ in I:
I\`. $x + 3(4x - 2) = 7$
$x + 12x - 6 = 7$
$13x = 13$
$x = 1$ in II\`:
$y = 2$ L = { (1|2) }

(2) Additionsverfahren
4·I – II : $12y + y = 28 - 2$
$13y = 26$
$y = 2$ in II:
$4x - 2 = 2$
$4x = 4$
$x = 1$ L = { (1|2) }

(3) Zeichnung



6. Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Bei einem Zufallsexperiment wird jedem Ereignis A eine **Wahrscheinlichkeit P(A)** zwischen 0 und 1 zugeordnet.

Zufallsexperimente, bei denen **alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich** sind, heißen **Laplace-Experimente**.
Hat ein Laplace-Experiment *n* Ergebnisse, so beträgt die Wahrscheinlichkeit für jedes Ergebnis $\frac{1}{n}$.

Das Werfen eines Würfels, der nicht gezinkt ist, hat sechs gleich wahrscheinliche Ergebnisse: $P(\{3\}) = \frac{1}{6}$

Für Laplace-Experimente gilt:

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\textit{Anzahl der für das Ereignis A günstigen Ergebnisse}}{\textit{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$$

Würfeln: W = {1; 2; 3; 4; 5; 6}
A = “Augenzahl gerade“ = {2; 4; 6}
$P(A) = \frac{3}{6} = 0{,}5$

Zählprinzip:
Zieht man aus *k* verschiedenen Mengen mit m_1, m_2, m_3 ... m_k Elementen jeweils ein Element, so gibt es insgesamt $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \ldots \cdot m_k$ Möglichkeiten.

Von A nach B führen 8 Wege, von B nach C führen 5 Wege und von C nach D verlaufen 6 Wege.
Es gibt also 8 · 5 · 6 = 240 Möglichkeiten, um von A über B und C nach D zu kommen.

7. Gebrochen rationale Funktionen

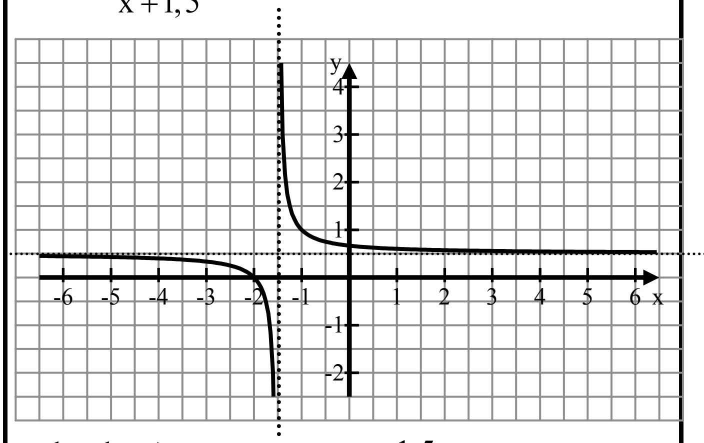
Funktionen wie $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{3}{x+2}$, $h(x)=\frac{2-x}{x^2}$, deren Funktionsterm ein Bruchterm ist, nennt man **gebrochen rationale Funktionen**.

Alle Zahlen, für die der **Nenner null** wird, können **nicht zur Definitionsmenge** der Funktion gehören.

Eine Gerade, die sich dem Graphen einer Funktion f beliebig genau annähert, nennt man eine **Asymptote** des Funktionsgraphen G_f.

Man unterscheidet **senkrechte und waagrechte Asymptoten**.

$$f(x)=\frac{1+0,5x}{x+1,5}\quad ;D_f=\mathbb{Q}\setminus\{-1,5\}$$



senkrechte Asymptote: $x=-1,5$

waagrechte Asymptote: $y=0,5$

Rechnen mit Bruchtermen

Kürzen:

Merke: Kürze **nie** aus **Differenzen** und **Summen**!
Beim Kürzen werden Zähler und Nenner eines Bruchterms jeweils durch denselben Term dividiert.

$$\frac{2x^2-3x}{4x^3-12x^2+9x}=\frac{x\cdot(2x-3)}{x\cdot(4x^2-12x+9)}=$$
$$=\frac{x\cdot(2x-3)}{x\cdot(2x-3)^2}\underset{x\cdot(2x-3)}{=}\frac{1}{2x-3}$$

Erweitern:

Beim Erweitern werden Zähler und Nenner eines Bruchterms jeweils mit demselben Term multipliziert.

$$\frac{1-x}{1+x}\overset{2(1+x)}{=}\frac{(1-x)\cdot 2(1+x)}{(1+x)\cdot 2(1+x)}=\frac{2(1-x^2)}{2(1+x)^2}=$$
$$=\frac{2-2x^2}{2+2x+2x^2}$$

Addieren bzw. Subtrahieren:

Ungleichnamige Brüche werden durch Erweitern auf den Hauptnenner (HN) gleichnamig gemacht.

$$\frac{a}{2a+2b}+\frac{b}{3a-3b}-\frac{ab}{a^2-b^2}=$$

Gemeinsamer Nenner:

$$\begin{aligned}2a+2b &= 2(a+b)\\ 3a-3b &= 3(a-b)\\ a^2-b^2 &= (a+b)(a-b)\\ \Rightarrow \textit{HN: } & 2\cdot 3\cdot(a+b)(a-b)\end{aligned}$$

$$=\frac{a\cdot 3(a-b)+b\cdot 2(a+b)-6ab}{6(a+b)(a-b)}=\frac{3a^2-7ab+2b^2}{6(a+b)(a-b)}$$

Multiplizieren bzw. Dividieren:

$$\frac{ax^2}{bx-by}:\frac{ax}{bx^2-by^2}=\frac{ax^2}{b(x-y)}\cdot\frac{b(x+y)(x-y)}{ax}=$$
$$=\frac{ax^2b(x+y)(x-y)}{b(x-y)ax}=x(x+y)$$

Negative Exponenten

Die Definition der Potenzen wird durch $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ sinnvoll erweitert. Es gilt $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ und $x^m : x^n = x^{m-n}$ für beliebige ganze Zahlen m und n.

$$\frac{x^3 \cdot x^{-4}}{x^{-2}} = x^{3-4} \cdot x^2 = x^{-1} \cdot x^2 = x^{-1+2} = x^1 = x$$

Bruchgleichungen

Eine Gleichung, bei der eine Variable mindestens einmal im Nenner auftritt, heißt **Bruchgleichung**.

Die Definitionsmenge D ist die Grundmenge ohne die Menge aller Nullstellen aller Nenner.

Durch die Multiplikation mit dem Hauptnenner macht man die Bruchgleichung nennerfrei.

$$\frac{2x+2}{x-1} - \frac{2}{3x} = \frac{7}{x} + 2$$

$$D = \mathbb{Q} \setminus \{0;1\}$$

$$HN: 3x(x-1)$$

$$(2x+2) \cdot 3x - 2(x-1) = 7(x-1) + 2 \cdot 3x(x-1)$$

$$(2x+2) \cdot 3x - 2(x-1) = 7(x-1) + 2 \cdot 3x(x-1)$$

$$6x^2 + 6x - 2x + 2 = 7x - 7 + 6x^2 - 6x$$

$$6x - 2x + 6x - 7x = -9 \quad \Rightarrow \quad 3x = -9$$

$$x = -3 \in D \quad \Rightarrow \quad L = \{-3\}$$

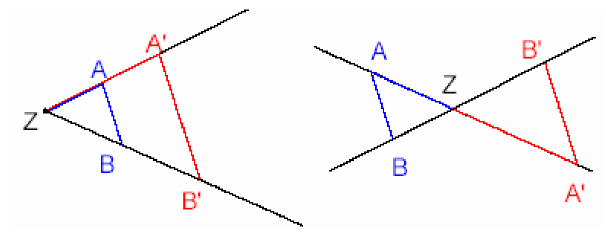
8. Ähnlichkeit

Strahlensätze

Werden zwei Geraden, die sich in einem Punkt *Z* schneiden, von zwei Parallelen außerhalb von *Z* geschnitten, so verhalten sich

(1) je zwei Abschnitte auf der einen Geraden wie die entsprechenden Abschnitte auf der anderen Geraden,

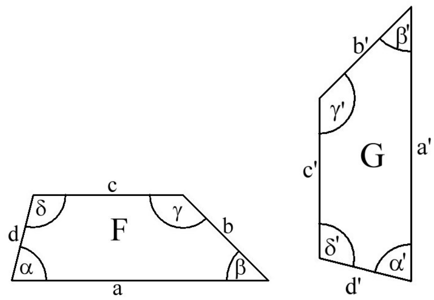
(2) die Abschnitte auf den Parallelen wie die **von *Z* aus** gemessenen entsprechenden Abschnitte auf der einen Geraden (bzw. auf der anderen Geraden)



$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZB'}} \qquad \frac{\overline{ZA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{ZA'}}{\overline{A'B'}}$$

Figuren F und G nennt man zueinander **ähnlich** (in Zeichen: **F ~ G**), wenn gilt:

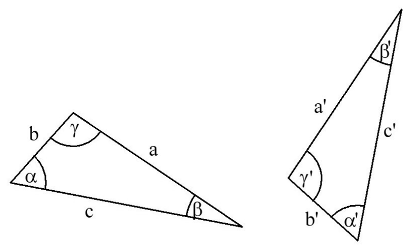
- entsprechende Seiten haben das gleiche Längenverhältnis,
- entsprechende Winkel sind gleich groß.
- Sind die Seitenlängen von G genau k-mal so lang wie die von F, so ist der Flächeninhalt von G genau k²-mal so groß wie der von F.



$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \ldots \qquad \alpha = \alpha' \quad \beta = \beta' \ \ldots \qquad \Rightarrow F \sim G$$

Dreiecke sind bereits dann **ähnlich**,

- wenn sie in zwei (und damit in allen) Winkeln übereinstimmen (WW-Satz),
- oder wenn sie im Verhältnis ihrer Seiten übereinstimmen (S:S:S-Satz).



$$\alpha = \alpha', \ \beta = \beta', \ \gamma = \gamma' \qquad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$